Intégrale : Gassoume Chouaibou WANE

Exercice 13

① Montrer que pour tout entiers naturels non nuls m et n :

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx.$$

② En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}$

Solution

① Soit $A = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

On pose $t = 1-x$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{array} \right. \quad dt = -dx$

Donc $\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_1^0 (1-t)^n t^m(-dt)$

$\int_1^0 (1-t)^n t^m(-dt) = \int_0^1 (1-t)^n t^m dt$

D'où

$$\boxed{\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 (1-x)^n x^m dx}$$

② Rap :

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$

$a=1$, $b=-x$

$(1-x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p 1^{n-p}(-x)^p$

D'où

$(1-x)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p(-1)^p x^p$

et

$(1-x)^m = \sum_{p=0}^{m} C_m^p (-1)^p x^p$

Alors d'après ①

$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$

$\int_0^1 [x^n \sum_{p=0}^{m} C_m^p(-1)^p x^p] dx = \int_0^1 [x^m \sum_{p=0}^{n} C_n^p(-1)^p x^p] dx$

linéarité de l'intégrale

$\sum_{p=0}^{m} \int_0^1 C_m^p(-1)^p x^{n+p} dx = \sum_{p=0}^{n} \int_0^1 C_n^p(-1)^p x^{m+p} dx$

$\sum_{p=0}^{m} \frac{C_m^p(-1)^p}{n+p+1} [x^{n+p+1}]_0^1 = \sum_{p=0}^{n} \frac{C_n^p(-1)^p}{m+p+1} [x^{m+p+1}]_0^1$

$\sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1}$

Par suite :

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{(-1)^p}{m+p+1} = \sum_{p=0}^{m} C_m^p \frac{(-1)^p}{n+p+1}$$